ディープヘッジとデルタヘッジの関連性と統計的裁定戦略の活用

Relationship between deep hedging and delta hedging: Leveraging a statistical arbitrage strategy

Finance Research Letters, Volume 62, Part A, 2024.

堀川 弘晃 (Hiroaki Horikawa)・中川 慧 (Kei Nakagawa)

ハイライト

- 統計的裁定戦略を数学的に定義
- ディープヘッジ ＝ デルタヘッジ ＋ 統計的裁定戦略
- 期待ショートフォール採用でドリフト推定無視

派生証券の売りとヘッジ

オプションの売りポジション

売却時(t=0) **満期T**

$+p_0$ $-Z$

$\boldsymbol{p_0 < Z}$のとき**損失**

p_0: 売却時にチャージしたオプションの価格

Z: オプションのペイオフ(確率変数)

ヘッジ：流動性の高い原資産等 S_t の取引により, 損失を回避

・**デルタヘッジ**：Black and Scholes(1972)に端を発する伝統的な手法
・**ディープヘッジ**：Beuhler et al.(2018) による**深層学習**を用いた手法

深層学習によるヘッジ技術の高度化

- 派生証券市場（OTC含む）の流動性が向上すればポートフォリオのリスク管理手法に多様性が生まれる
- デルタヘッジの課題
    - 摩擦の存在しない理想的な市場を想定（取引コスト・離散的な取引・流動性）
    - 確率ボラティリティモデル等、非完備な市場モデルを用いる際の確率測度の決め方に理論的根拠がない
- ディープヘッジ
    - あらゆる市場摩擦を考慮したうえでヘッジ戦略を学習
    - 実確率測度を用いてヘッジ戦略を学習するため、リスク中立確率測度を決定する必要がない
    - 生成モデルを利用した学習も可能

デルタヘッジ

原資産の取引によりオプションのペイオフを複製する

$$Z = p_0 + \underbrace{\int_0^T \Delta_t \cdot dS_t}_{\text{取引からのgain}}$$

・Δ_t: t時点における原資産の保有単位

・dS_t: t時点から微小時間経過したときの原資産の価格変化

・完備市場（任意のペイオフを複製できる理想的な市場）では,

$\boldsymbol{\Delta_t = \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)}$ となることが知られている.ここで, $\frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)$ は原資産価格の微小な変化量に対するオプション価格変化率 (**デルタ**) である

※1. 簡便のためr=0を仮定

※2. 各時刻のオプションの価格は$C^{1,2}$ – 級関数 $C: [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$を用いて$C(t, S_t)$と表せることを仮定

ディープヘッジの原理

- **満期時点の損益**の**凸リスク尺度**を最小化： **Profit and Loss** (以後, PnL)

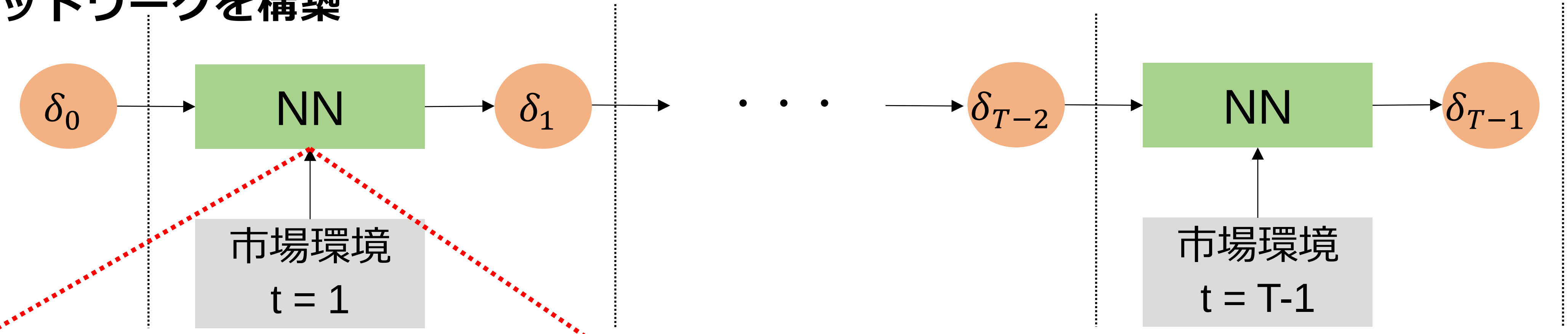
$$\inf_{\delta\in\mathcal{H}} \rho\left(\boxed{-Z + (\delta\cdot S)_T - c_T(\delta)} \right)$$

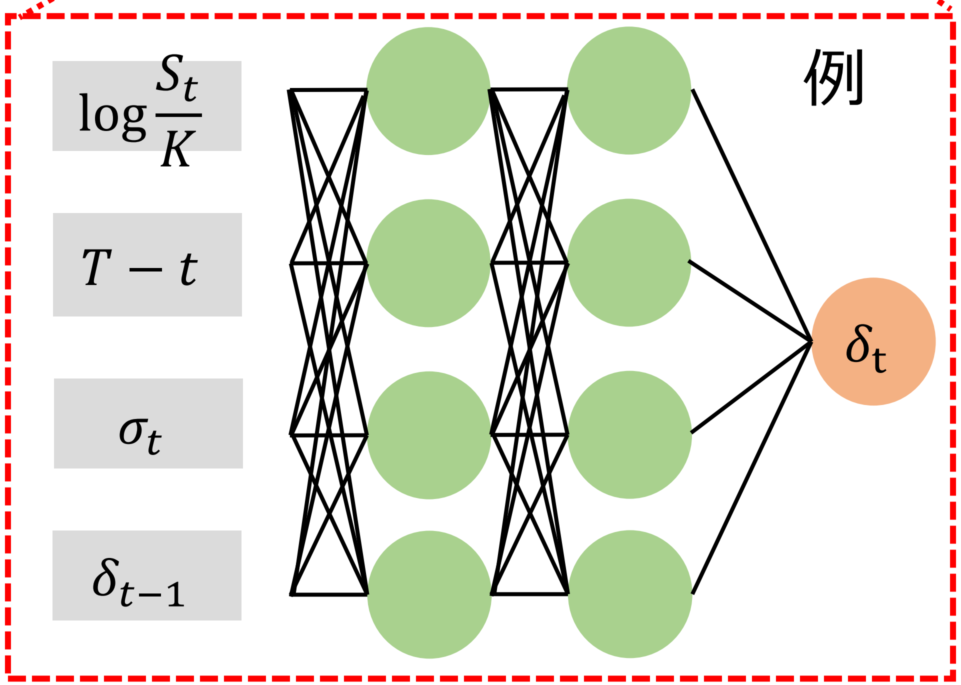
- $\boldsymbol{\rho}$: χ(確率変数の集合) $\to \mathbb{R}$ ：**凸リスク尺度**. 満期時点のPnL(確率変数)を実数に返す汎関数.この値が小さい方がより望ましい.
- $\boldsymbol{\delta} \coloneqq (\delta_t)_{t\in[0,T]}$:**ヘッジ戦略**. 各 t 時点での原資産の保有量を表す
- $(\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{S})_{\boldsymbol{T}} \coloneqq \int_0^T \delta_t \cdot dS_t$ ：取引からの gain
- $\boldsymbol{c_T}(\boldsymbol{\delta})$ ：取引コスト
- **気持ち**：自らの**PnLの分布をスコアリング**し,そのスコアを**小さくする**

  ヘッジ戦略を学習する

ディープヘッジの学習の流れ①

①ネットワークを構築





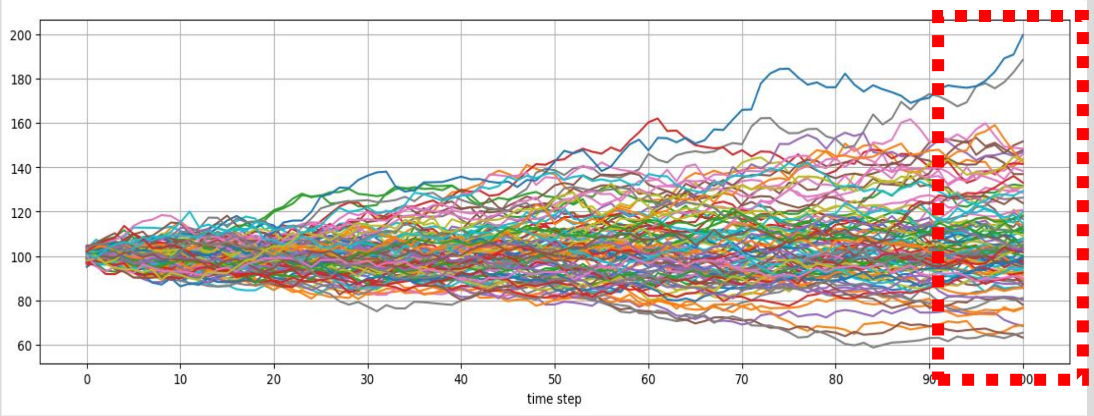
②資産過程をモデリング

$$dS_t = S_t\left(\boxed{\boldsymbol{\mu}}\,dt + \sigma\, dW_t\right)$$

ディープヘッジの学習の流れ②

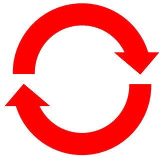
③資産過程をシュミレーション

n個の$(S_t)_{t\in[0,T]}$



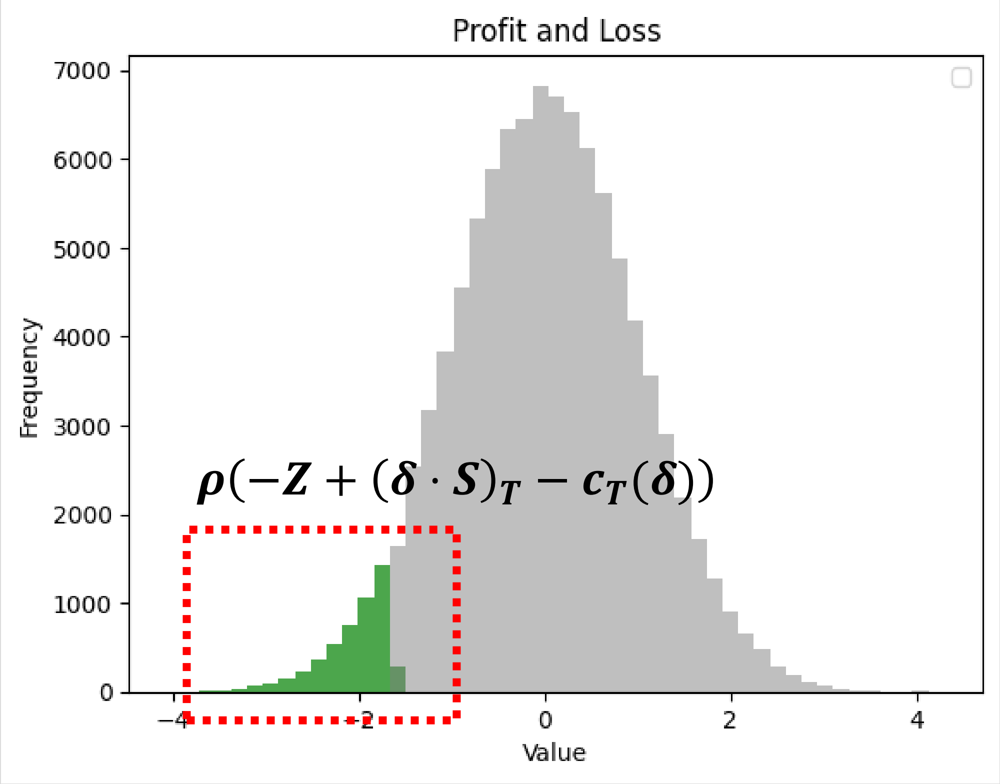
1. $(S_t)_{t\in[0,T]}$をn本生成
2. n個のペイオフZを得る
3. NN からのδで,n個のPnLを獲得

生成



学習

④リスク尺度の値の計算



$\boldsymbol{\rho(-Z + (\delta \cdot S)_T - c_T(\delta))}$

例：期待Shortfall($\alpha = 0.05$)
下側５%の平均

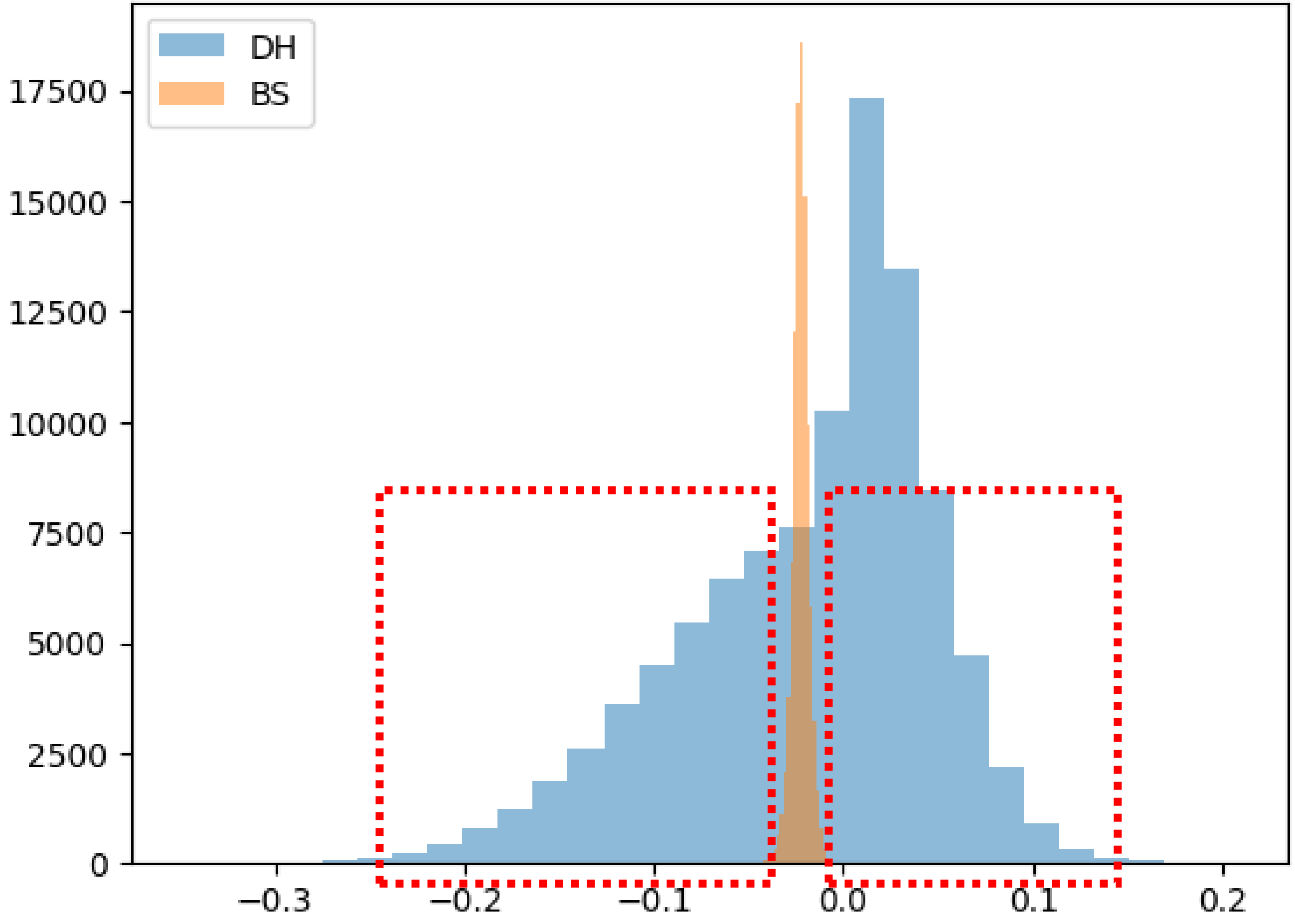
ディープヘッジの問題意識

	ディープヘッジ	デルタヘッジ
原理	凸リスク最小化	無裁定原則に基づくペイオフの複製
確率モデルの測度	**実測度**	**リスク中立確率測度**
仮定	取引摩擦あり・非完備市場	完備市場(または複製可能)
問題点	**デルタヘッジとの関係**が不明瞭 **統計的裁定**が学習を阻害	非完備な市場では完璧でない

・デルタヘッジとの関係が明らかにされれば**説明可能性が向上**.

・**統計的裁定**：主に原資産過程のドリフトに起因する収益獲得機会. 厳密な裁定ではない.

Black-Scholesのデルタとディープヘッジを比較



- ATMヨーロピアンコール
- Entropic Risk Measure ($\theta = 1.0$)

  i.e. $\rho(\,\cdot\,) \coloneqq \log \mathbb{E}\left[e^{-(\,\cdot\,)} \right]$
- $dS_t = S_t\,(\boldsymbol{\mu}\,dt + \sigma\,dW_t\,),\ S_0 = 1$
- $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0.05}, \sigma = 0.20$
- 取引回数20回
- 学習後10000回シュミレーション

- 統計的裁定：**平均は勝っている**が, 大きな**テールリスク**
- ペイオフのヘッジより**儲けを重視**

定義6(**統計的裁定戦略**)

$\delta \in \mathcal{H}$ が以下を満たすとき, δ を**統計的裁定機会**と呼ぶ:

$$\rho\left(((\delta \cdot S)_T)\right) \leq 0$$

また，統計的裁定機会 δ^{SA} が以下を満たすとき**統計的裁定戦略**と呼ぶ：

$$\rho(((\delta^{SA} \cdot S)_T) = \inf_{\delta \in \mathcal{H}} \rho\left(((\delta \cdot S)_T\right) \leq 0$$

・**統計的裁定戦略**：凸リスク尺度を**最小化**する**原資産取引**

定理2(**ディープヘッジとデルタヘッジの関係**)

無リスク利子率 $r = 0$,取引コストは存在しないことを仮定する.
派生証券 Z はデルタヘッジ戦略 $\Delta \in \mathcal{H}$ により**複製可能である**とする.
統計的裁定戦略 $\delta^{SA} \in \mathcal{H}$ が存在し，一意であるとする.
また，$\delta^{DH} \in \mathcal{H}$ が存在し，以下を満たすとする:

$$\rho(-Z + (\delta^{DH} \cdot S)_T) = \inf_{\delta \in \mathcal{H}} \rho(-Z + (\delta \cdot S)_T)$$

このとき， 以下の等式が成立する.

$$\boldsymbol{\delta^{DH}} = \boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\delta^{SA}}$$

取引 $(\delta \cdot S)_T$ で儲ける戦略

$Z - p_0$ を小さくする戦略

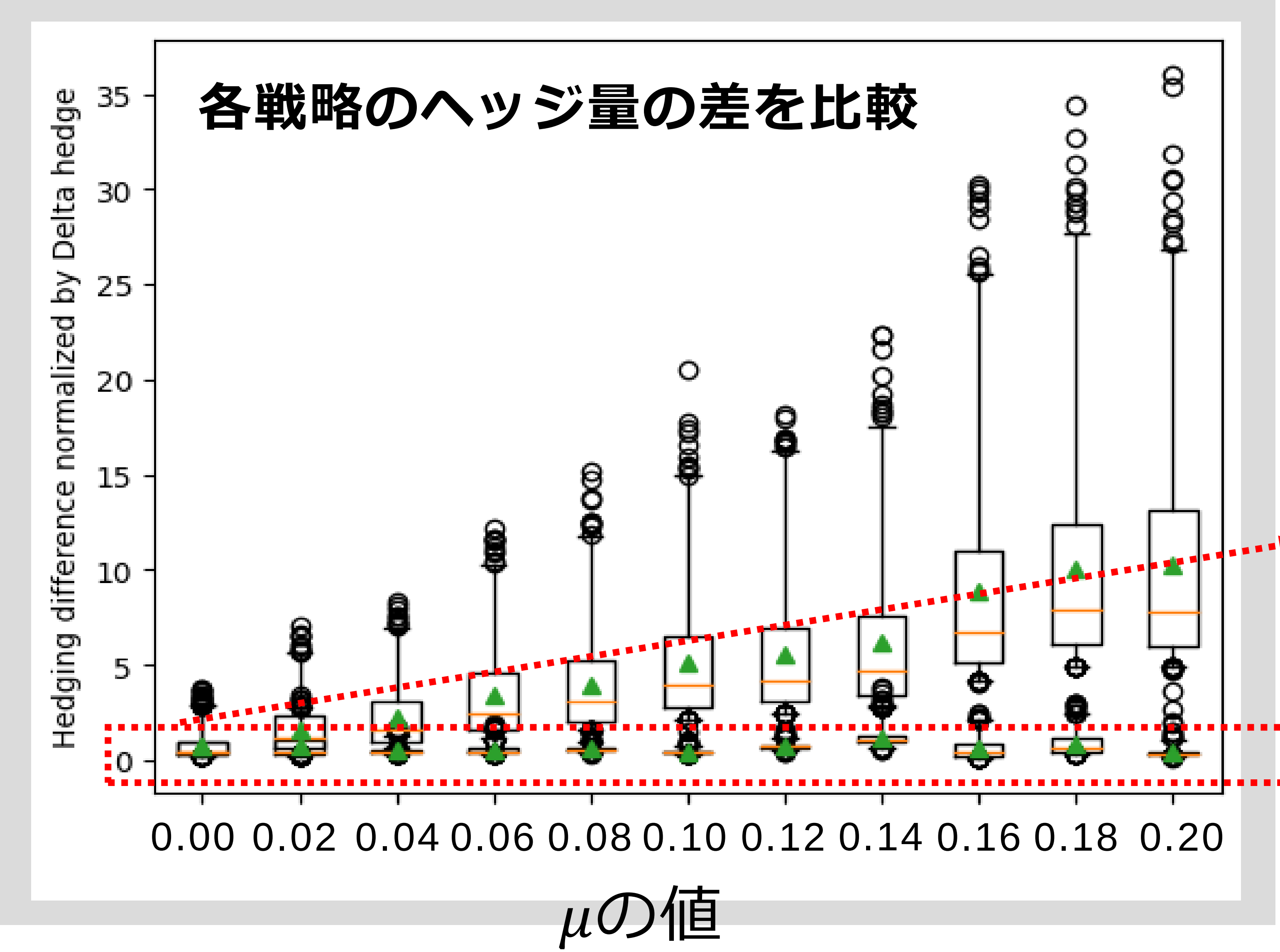
(証明は予稿参照)

・**ディープヘッジ** = **デルタヘッジ** + **統計的裁定戦略**

・大きな統計的裁定機会の存在

⇒ ヘッジング資産の取引によるGainを優先, **ペイオフ複製の学習を阻害**

数値実験①：ドリフトμを上昇させてみた



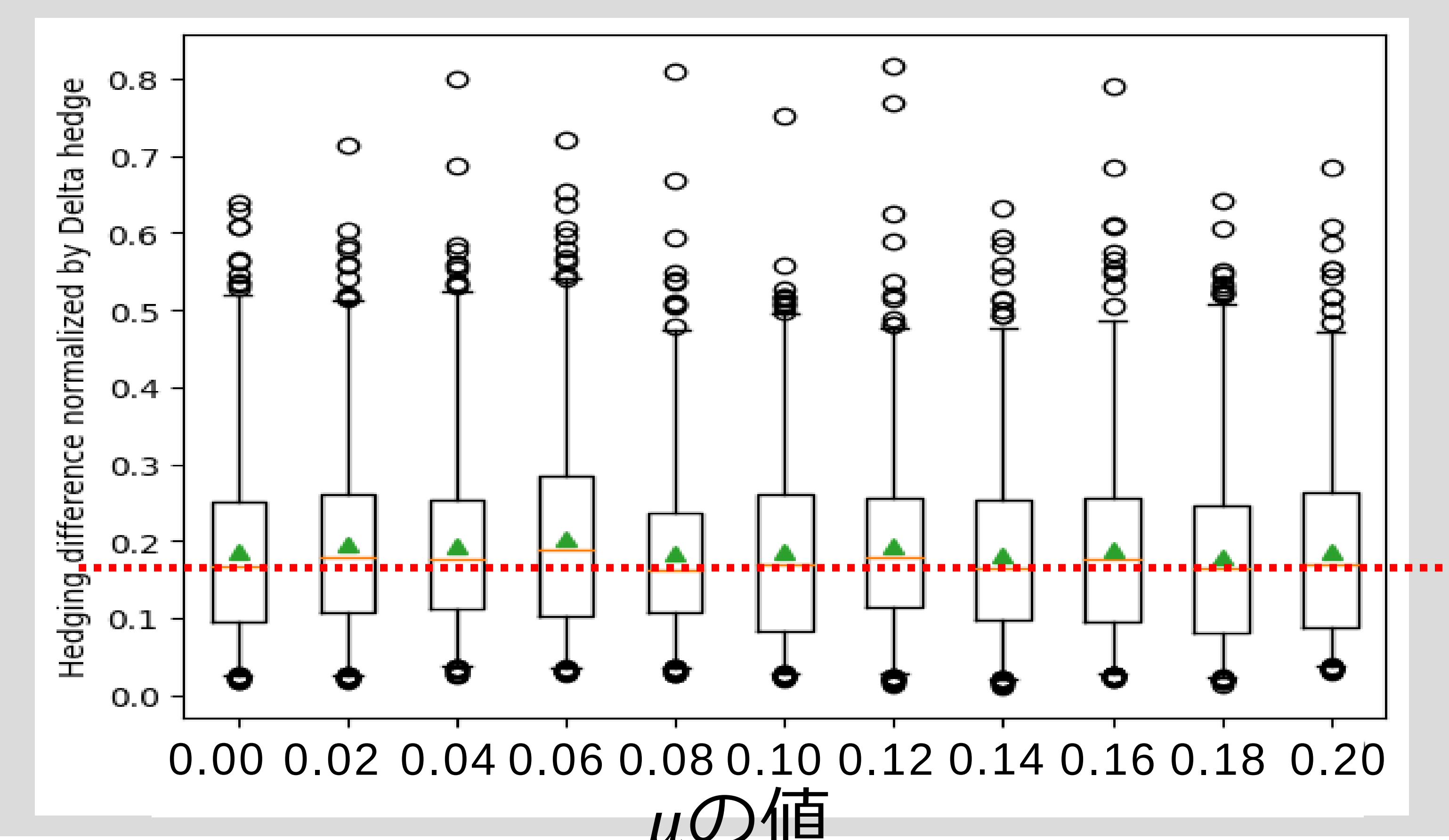
- ATMヨーロピアンコール
- Entropic Risk Measure ($\theta = 1.0$)

  i.e. $\rho(\cdot) \coloneqq \log \mathbb{E}\left[e^{-(\cdot)}\right]$
- $dS_t = S_t\,(\mu\,dt + \sigma\,dW_t),\ S_0 = 1$
- $\sigma = 0.20$
- δ_{SA}は確率制御問題で求めた

$\boldsymbol{\delta^{DH}} - \boldsymbol{\Delta}$：$\mu$上昇⇒**差異上昇**

$\boldsymbol{\delta^{DH}} - \boldsymbol{\Delta} - \boldsymbol{\delta^{SA}}$：
μ上昇⇒**差異0キープ**

数値実験②：期待ショートフォール($\alpha = 0.5$)の場合



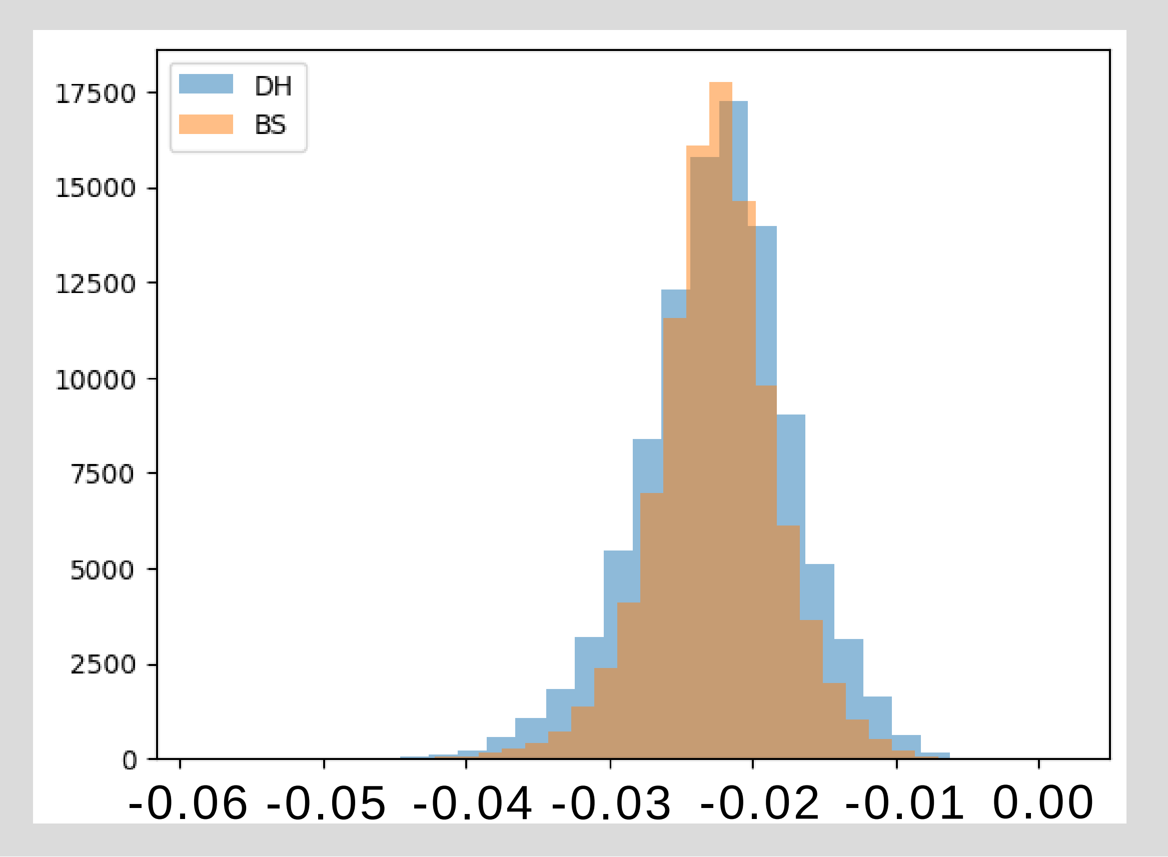
μの値

$\delta^{DH} - \Delta$：**0付近で一定**

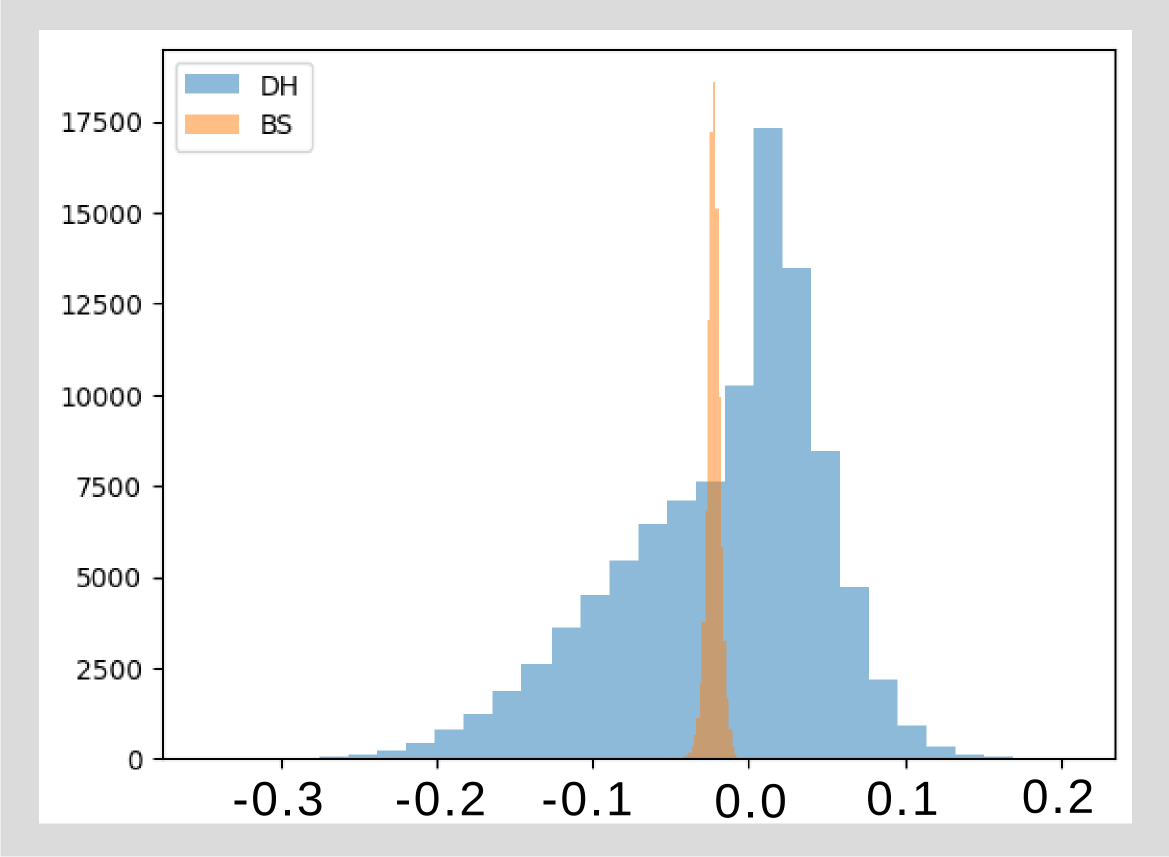
- **期待ショートフォール**の方がドリフトの上昇に対して**ロバスト**
- **ドリフトの推定を無視**することの正当化の可能性

数値実験③：PnLの比較

$\mu = \mathbf{0.05}, \sigma = 0.20$ のとき



期待ショートフォール$(\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.5})$



Entropic Risk Measure $(\boldsymbol{\theta} = \mathbf{1.0})$

・期待ショートフォールのPnLは**統計的裁定からの影響が小さい**

まとめ

- **統計的裁定戦略** := 原資産取引によるリスク尺度最小化戦略
- **ディープヘッジ** = **デルタヘッジ** + **統計的裁定戦略**
- **期待ショートフォール**の採用により**ドリフトの推定を無視**

課題

- ディープヘッジと統計的裁定戦略の差異: $\delta^{DH} - \delta^{SA}$ に関する一般的な性質の研究
- 期待ショートフォールのロバスト性に関する詳細な解釈の研究